



## Elipsoide Triaxial Homogêneo em Equilíbrio no Sistema Solar

Dairo Antonio Cuellar Mateus<sup>1</sup>, Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, Brasil  
Aluno de doutorado do curso de Engenharia e Tecnologias Espaciais - CMC.

<sup>2</sup> Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, Brasil  
Engenharia e Tecnologias Espaciais - CMC.

dairo.cuellar@inpe.br

---

**Resumo.** *O elipsoide triaxial homogêneo, é um corpo ideal que tem sido empregado para modelar a distribuição de massa de corpos celestes, como no caso de alguns asteroides. Neste trabalho, as condições de equilíbrio deste corpo ideal são consideradas para determinar quais dos pequenos corpos celestes as satisfazem. As condições de equilíbrio neste caso, definem o spin em função da distribuição de massa e da densidade de massa do corpo, e impõe um limite superior no semi-eixo menor. Considerando as incertezas inerentes nas observações para determinar os parâmetros dos corpos celestes. Então, concluímos que o asteroide 243 Ida é um ETHE.*

---

**Palavras-chave:** Astrodinâmica; Asteroides; Potencial Gravitacional.

### 1. Introdução

O corpo ideal: elipsoide triaxial homogêneo em equilíbrio (ETHE), tem sido de interesse desde o século XIX, quando foi descoberto por C.G.J. Jacobi o qual foi chamado de *elipsoide de Jacobi* (IURATO, 2014). Porém, este não é o único corpo ideal com estas características, existem mais quatro ETHE: elipsoide de Dedekind; de Riemann; de Roche; de Darwin. Um estudo detalhado sobre o ETHE é encontrado em (CHANDRASEKHAR, 1969).

A partir das observações, alguns asteroides são modelados como um elipsoide triaxial (FARINELLA et al., 1981; CHAUVINEAU; FARINELLA; MIGNARD, 1993; EFROIMSKY, 2002). Estes corpos celestes são de interesse na comunidade científica, tanto assim que alguns deles são objetivo de missões espaciais, algumas destas missões no passado são: a missão Hayabusa2 (2014) da Agência Japonesa de Exploração Espacial (JAXA pelas suas sigla em inglês); a missão Danw (2007) dirigida pela NASA. No futuro, a missão Psyche (2022) da NASA, tem o objetivo de analisar o asteroide 16 Psyche considerado como um mundo de metal. Informação sobre estas missões é de fácil acesso no site oficial das agências espaciais correspondentes.

O modelo elipsoidal ajustado a alguns asteroides e a sua relação com o período de rotação observado, teve início nos anos 70 (MCADOO; BURNS, 1973). Em 1981, o pesquisador S. J. Weidenschilling (WEIDENSCHILLING, 1981) aplicando o modelo de elipsoide triaxial, concluiu que um período de rotação de 4 horas para um asteroide, corresponderia a uma



densidade de massa entre 2 e 3 kg/m<sup>3</sup>, e se a composição do asteroide fosse de Ferro (≈7 kg/m<sup>3</sup>). Então, o período de rotação seria de quase 2 horas.

Como mencionado acima, o elipsoide triaxial homogêneo é empregado como modelo de alguns asteroides. Porém, não se encontrou na literatura a correspondência de corpos do sistema solar com o ETHE. Neste trabalho, estamos interessados na busca de corpos celestes que cumpram as condições de equilíbrio do ETHE.

## 2. Metodologia

Se uma partícula sobre a superfície do elipsoide triaxial em rotação experimenta uma força resultante nula. Então, a partícula está em equilíbrio mecânico. As forças em equilíbrio aqui consideradas são: a força gravitacional própria do corpo e a força centrífuga gerada pela sua rotação. Esta condição de equilíbrio é expressa mediante a seguinte equação:

$$-A\alpha^2 - B\beta^2 - C\gamma^2 + D + \frac{1}{2}\eta_p^2(\alpha^2 + \beta^2) = cte, \quad (1)$$

em que no lado esquerdo, a soma dos primeiros quatro termos da equação é o potencial gravitacional interno do elipsoide triaxial e o quinto termo é o potencial centrífugo de uma partícula sobre a superfície.  $\eta_p$  é o *spin* do corpo e  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são os semi-eixos do elipsoide, tal que  $\alpha > \beta > \gamma$ . Os parâmetros  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , são dados por:

$$A = \pi G \rho \alpha \beta \gamma \int_0^\infty \frac{du}{(\alpha^2 + u)\phi(u)}, \quad B = \pi G \rho \alpha \beta \gamma \int_0^\infty \frac{du}{(\beta^2 + u)\phi(u)}$$
$$C = \pi G \rho \alpha \beta \gamma \int_0^\infty \frac{du}{(\gamma^2 + u)\phi(u)}, \quad D = \pi G \rho \alpha \beta \gamma \int_0^\infty \frac{du}{\phi(u)},$$

em que  $\phi(u) = [(\alpha^2 + u)(\beta^2 + u)(\gamma^2 + u)]^{1/2}$  (KELLOGG, 1953). A condição de equilíbrio (1) é equivalente às duas equações:

$$\alpha^2 \left( A - \frac{\eta_p^2}{2} \right) = \beta^2 \left( B - \frac{\eta_p^2}{2} \right), \quad (2a)$$

$$\alpha^2 \left( A - \frac{\eta_p^2}{2} \right) = C\gamma^2. \quad (2b)$$

Após manipulação algébrica na equação (2a), obtemos:

$$\eta_p^2 = \frac{2\pi G \rho \alpha \beta \gamma}{(\alpha^2 - \beta^2)} \left( \alpha^2 \int_0^\infty \frac{du}{(\alpha^2 + u)\phi(u)} - \beta^2 \int_0^\infty \frac{du}{(\beta^2 + u)\phi(u)} \right) \quad (3)$$

A segunda equação do sistema (2), é válida se a seguinte relação é satisfeita:

$$\frac{1}{\gamma^2} > \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}. \quad (4)$$



Do anterior, as condições de equilíbrio para um elipsoide triaxial homogêneo em rotação uniforme são tais que: a frequência angular é definida pela expressão (6) e os semi-eixos satisfazem a relação (4).

No que segue, escolhemos o semi-eixo  $\alpha$  como a unidade no ETHE, portanto:

$$\beta = q\alpha, \quad \gamma = s\alpha, \quad \text{com } 0 < s < q < 1.$$

Os parâmetros  $q$  e  $s$  formam a dupla ( $q:s$ ) a qual representa a distribuição de massa do corpo. As integrais elípticas nos parâmetros  $A$  e  $B$ , são homogêneas de grau  $-3/2$ . Fazendo uso desta propriedade, estas integrais escritas em função de  $\alpha$ ,  $q$  e  $s$  resultam em:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{du}{(\alpha^2 + u)\Delta} &= \frac{2}{3}F_J(\beta^2, \gamma^2, \alpha^2, \alpha^2) = \frac{2}{3}F_J(q^2\alpha^2, s^2\alpha^2, \alpha^2, \alpha^2) \\ &= \frac{2}{3}(\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}F_J(q^2, s^2, 1, 1) \\ &= \frac{2}{3}\alpha^{-3}F_D(q^2, s^2, 1), \end{aligned} \quad (5)$$

e

$$\int_0^\infty \frac{du}{(\beta^2 + u)\Delta} = \frac{2}{3}\alpha^{-3}F_D(1, s^2, q^2).$$

Nas duas ultimas expressões denotamos  $F_\alpha = F_D(q^2, s^2, 1)$  e  $F_\beta = F_D(1, s^2, q^2)$ . A integração de  $F_\alpha$  e  $F_\beta$  será feita seguindo o processo definido em Carlson (1995) (neste trabalho, o polinômio empregado na obtenção dos parâmetros  $A$  e  $B$  é aquele obtido até a segunda iteração,  $m = 2$ ). A pós estas modificações, o spin do ETHE é determinado mediante a expressão:

$$\eta_p^2 = \frac{4\pi G\rho qs}{3(1 - q^2)}(F_\alpha - q^2 F_\beta). \quad (6)$$

e a condição de equilíbrio (7) é equivalente a:

$$s < \left( \frac{q^2}{1 + q^2} \right)^{1/2}. \quad (7)$$

Nesta ultima relação, observa-se que  $s \rightarrow 1/\sqrt{2}$  quando  $q \rightarrow 1$  e que para cada valor de  $q$  tem-se um valor máximo de  $s$ . Por tal motivo, definimos a função:

$$s_{max}(q) = \left( \frac{q^2}{1 + q^2} \right)^{1/2}, \quad (8)$$

a qual nos permitira falar em família de ETHE. Na expressão (6), vemos que o spin independe do tamanho do corpo, e sim depende da distribuição e da densidade de massa. Isto implica a mesma dependência no período de rotação do ETHE,  $T = 2\pi/\eta_p$ , o qual é determinado mediante a função:

$$T(q, s, \rho) = \left( \frac{3\pi(1 - q^2)}{G\rho qs(F_\alpha - q^2 F_\beta)} \right)^{1/2}. \quad (9)$$

Um dos critérios na busca apresentada na seção seguinte é o período de rotação do corpo.



### 3. Resultados e Discussão

Em relação aos valores possíveis da densidade de massa para determinar o período de rotação, no caso de asteroides, alguns exemplos de densidade de massa são:  $\rho \approx 1,60$ ,  $\rho \approx 3,3$ ,  $\rho \approx 3,5$ ,  $\rho \approx 4,5$  e  $\rho \approx 7,14$ , que correspondem aos materiais Condrito Carbonáceo, Condrito ordinário, Enstatita, Ferrero-rochosos e Ferro, em  $\text{g/cm}^3$  respectivamente, (CARRY, 2012). Assim, escolhemos a família de ETHE determinada pela densidade de massa no intervalo (1, 7)  $\text{kg/m}^3$ , por  $q = 0,999$  e  $s$  no intervalo  $(0,2, s_{max}(q))$ . O período de rotação para esta família é observado na figura 1.

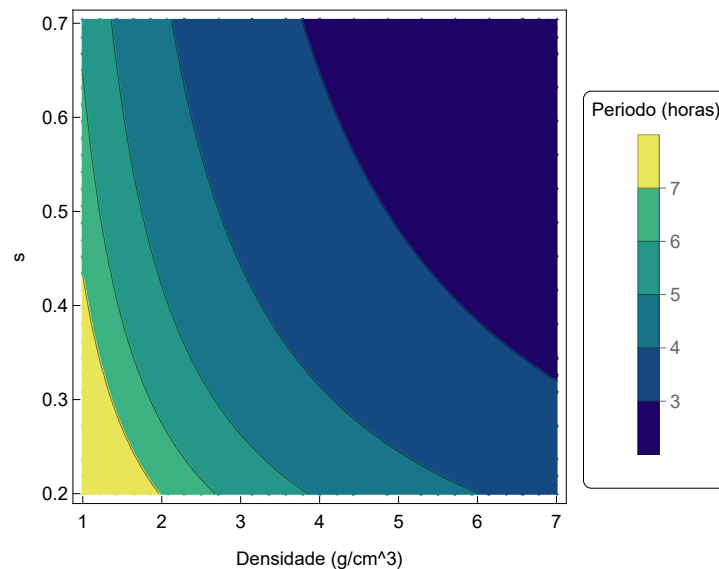


Figura 1. Período de rotação da família de ETHE.

Observa-se um período máximo e mínimo aproximado de oito e duas horas, respectivamente, também observa-se que o período de rotação diminui quando a densidade do primário aumenta. E fixando o valor de  $\rho$ , o período diminui quando  $s \rightarrow s_{max}$ . O período de rotação máximo observado o utilizamos como referência para a busca de ETHE no sistema solar.

Foi feita a busca na base de dados sobre corpos pequenos do sistema solar que possui o Jet Propulsion Laboratory (JPL). O critério da procura corresponde às restrições: período de rotação menor do que 8 horas e as dimensões do corpo definidas. O segundo critério tem como fim determinar se o corpo satisfaz a condição de equilíbrio (7). O resultado desta busca é apresentado na Figura 2.



JPL Small-Body Database Search Engine  
[ [Refine Search](#) ] Results: 11 matching objects  
Constraints: asteroids and rot\_per < 8 (h) and extent (km) is defined

<a href="#">object fullname</a>	<a href="#">IAU name</a>	<a href="#">extent</a> (km)	<a href="#">rot_per</a> (h)	<a href="#">GM</a> (km <sup>3</sup> /s <sup>2</sup> )
<a href="#">2 Pallas (A802 FA)</a>	Pallas	582x556x500	7.8132	14.3
<a href="#">4 Vesta (A807 FA)</a>	Vesta	572.6 x 557.2 x 446.4	5.34212766	17.288245
<a href="#">16 Psyche (A852 FA)</a>	Psyche	279 x 232 x 189	4.196	1.53
<a href="#">216 Kleopatra (A880 GB)</a>	Kleopatra	276x94x78	5.385	
<a href="#">243 Ida (A884 SB)</a>	Ida	59.8x25.4x18.6	4.634	0.00275
<a href="#">433 Eros (A898 PA)</a>	Eros	34.4x11.2x11.2	5.270	4.463e-04
<a href="#">951 Gaspra (A916 OJ)</a>	Gaspra	18.2x10.5x8.9	7.042	
<a href="#">1620 Geographos (1951 RA)</a>	Geographos	5.0x2.0x2.1	5.22204	
<a href="#">66391 Moshup (1999 KW4)</a>	Moshup	1.532 x 1.495 x 1.347	2.7645	
<a href="#">101955 Bennu (1999 RQ36)</a>	Bennu	0.5047 x 0.4918 x 0.4567	4.296061	4.8904e-9
<a href="#">185851 (2000 DP107)</a>		0.992 x 0.938 x 0.964	2.7754	3.224e-8

[ [Refine Search](#) ]

ABOUT SSD CREDITS/AWARDS PRIVACY/COPYRIGHT GLOSSARY LINKS

FIRST GOV Your First Click to the U.S. Government

2021-Sep-02 11:38 UT (server date/time)

NASA Site Manager: Ryan S. Park  
Webmaster: Alan B. Chamberlin

Figura 2. Possíveis ETHE no Sistema Solar.

Dos objetos listados, só os asteroides: Ida, Gaspra e Kleopatra satisfazem a condição de equilíbrio (7), pois distribuição de massa é (0,424: 0,311), (0,576: 0,489) e (0,340: 0,282), respectivamente.

No caso do asteroide Ida determinamos o período  $T_{tco}$ , equação (9), usando o valor médio de densidade observado,  $\rho = 2,6 \pm 0,5$ , e o apresentamos na Tabela 1. Comparando  $T_{obs}$  e  $T_{tco}$ , vemos que  $T_{obs} - T_{tco} = 0,014$  horas, o que equivale a 0,84 minutos. A diferença entre os valores do período de rotação pode ser produto de algum ou da combinação dos fatores



Tabela 1: ETHE no Sistema Solar.

Asteroide	$T_{obs}$ (h)	$T_{tco}$ (h)	$\rho_{tco}$
Ida	4,634	4,620	-
Gaspra	7,042	-	0,793
Kleopatra	5,385	-	2,127

seguintes: da aproximação feita nas integrais  $F_\alpha$  e  $F_\beta$  que compõe a equação (9); da incerteza na medição da densidade de massa; da aproximação feita na distribuição de massa, aproximação observada comparando as Figuras 3 e 4. Levando em conta estas observações, podemos concluir que o asteroide Ida é um ETHE.



Figura 3. Asteroide 243 Ida. [Fonte:NASA/JPL]

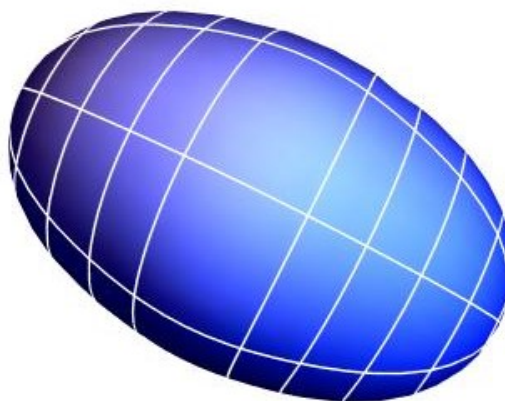


Figura 4. Elipsoide com distribuição de massa do asteroide 243 Ida.

No caso dos asteroides Gaspra e Kleopatra, a densidade de massa ainda não está determinada, segundo a base de dados consultada. Por exemplo, a densidade de massa do asteroide Kleopatra ainda é objeto de discussão (SHEPARD et al., 2018). Para que estes dois corpos celestes sejam



considerados um ETHE, deveriam ter  $\rho = \rho_{tco}$ , valor definido como sendo a raiz da equação  $T(q, s, \rho) - T_{obs} = 0$ , com  $q$  e  $s$  do respectivo corpo. Na tabela 1, apresentamos os valores dos parâmetros observados e teóricos dos tres asteroides.

#### 4. Conclusão

Escolhendo o semi-eixo maior do corpo como a unidade de medida, o spin do ETHE é uma função da distribuição de massa e da densidade do corpo e não depende do tamanho do corpo. A partir do gráfico (1), observa-se que o período de rotação dos ETHE aqui considerados está no intervalo de 2 a 8 horas. Considerando as incertezas nas observações do asteroide 243 Ida, e o erro na solução numérica feita para as integrais elípticas na função do período de rotação, função (9). Então, consideramos este asteroide como sendo um ETHE no nosso Sistema Solar.

**Agradecimentos:** O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

#### Referências

CARLSON, B. C. Numerical computation of real or complex elliptic integrals. *Numerical Algorithms*, Springer, v. 10, n. 1, p. 13–26, 1995.

CARRY, B. Density of asteroids. *Planetary and Space Science*, Elsevier, v. 73, n. 1, p. 98–118, 2012.

CHANDRASEKHAR, S. Ellipsoidal figures of equilibrium (new haven. Conn.: Yale University, 1969.

CHAUVINEAU, B.; FARINELLA, P.; MIGNARD, F. Planar orbits about a triaxial body: Application to asteroidal satellites. *Icarus*, Elsevier, v. 105, n. 2, p. 370–384, 1993.

EFROIMSKY, M. Euler, jacobi, and missions to comets and asteroids. *Advances in Space Research*, Elsevier, v. 29, n. 5, p. 725–734, 2002.

FARINELLA, P. et al. Triaxial equilibrium ellipsoids among the asteroids? *Icarus*, Elsevier, v. 46, n. 1, p. 114–123, 1981.

IURATO, G. The dawning of the theory of equilibrium figures: a brief historical account from the 17th through the 20th century. *arXiv preprint arXiv:1409.3858*, 2014.

KELLOGG, O. D. *Foundations of potential theory*. [S.l.]: Courier Corporation, 1953. v. 31.

MCADOO, D. C.; BURNS, J. A. Further evidence for collisions among asteroids. *Icarus*, Elsevier, v. 18, n. 2, p. 285–293, 1973.

SHEPARD, M. K. et al. A revised shape model of asteroid (216) kleopatra. *Icarus*, Elsevier, v. 311, p. 197–209, 2018.

WEIDENSCHILLING, S. How fast can an asteroid spin? *Icarus*, Elsevier, v. 46, n. 1, p. 124–126, 1981.